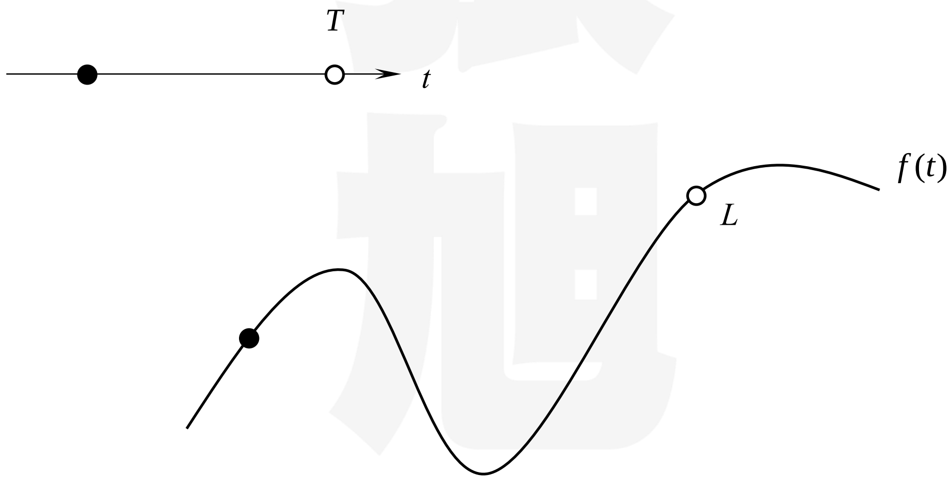
重點二 極限的嚴格定義

1. 用參數 (parameter) 的觀點看函數：



結論

$\lim_{t\to T} f(x) = L \iff$

2. 極限存在的嚴格定義：

$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff$

3. 此定義又稱為 ε-δ 定義

例題 1.

Apply the ε-δ definition to show that $\lim_{x\to 1}(3x+2)=5$.

解

例題 2.
Apply the *ε*-*δ* definition to show that $\lim_{x\to -2}(5x-7)=-17$.

解

例題 3. (精選範例 2-1)
Apply the *ε*-*δ* definition to show that $\lim_{x\to 2}(x^2+5)=9$.

解

例題 4. (精選範例 2-2)

Apply the ε-δ definition to show that $\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2}$.

解

例題 5. (精選範例 2-3)

Apply the ε-δ definition to show that $\lim_{x\to 3}\sqrt{x+1}=2$.

解

重點二（補充）極限的唯一性

1. 若一函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的極限存在，則其極限值是唯一的。

說明

1° Suppose that $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ and $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = M$.

If $L \neq M$, then $\dfrac{|L - M|}{2} > 0$.

2° $\because$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ and $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = M$

$\therefore$ $\exists \delta > 0$ such that, $\forall 0 < |x - x_0| < \delta$, $|f(x) - L|, |f(x) - M| < \dfrac{|L - M|}{2}$

So, $\forall 0 < |x - x_0| < \delta$, we have

$|L - M| \leq |[L - f(x)] + [f(x) - M]| \leq |L - f(x)| + |f(x) - M| < |L - M|$,

where yields a contradiction.

Hence $L = M$. [Q.E.D.]

2. 面對極限問題 ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$)

$\Rightarrow$ 直觀猜值 $\Rightarrow$ 用嚴格定義證明 $\Rightarrow$ 唯一性告訴你此極限值唯一