

第三章 向量微積分

- 多變數函數和向量函數的微積分

重點一 向量函數的定義

1. 向量函數的定義

- (1) 型如： $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ ，其中 $y_k = y_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，者，稱為向量函數（變數的數量沒有限制，重點是所對應出來的是向量）
- (2) 承 (1)， $y_k = y_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 稱為 f 的第 k 個分量函數，或第 k 維投影

2. 向量函數的意義

- (1) $f(t) = (x(t), y(t))$ ：單變數二維向量函數，可用來表示 _____
- (2) $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ：單變數三維向量函數，可用來表示 _____
- (3) $f(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$ ：三變數三維向量函數

可用來表示 _____

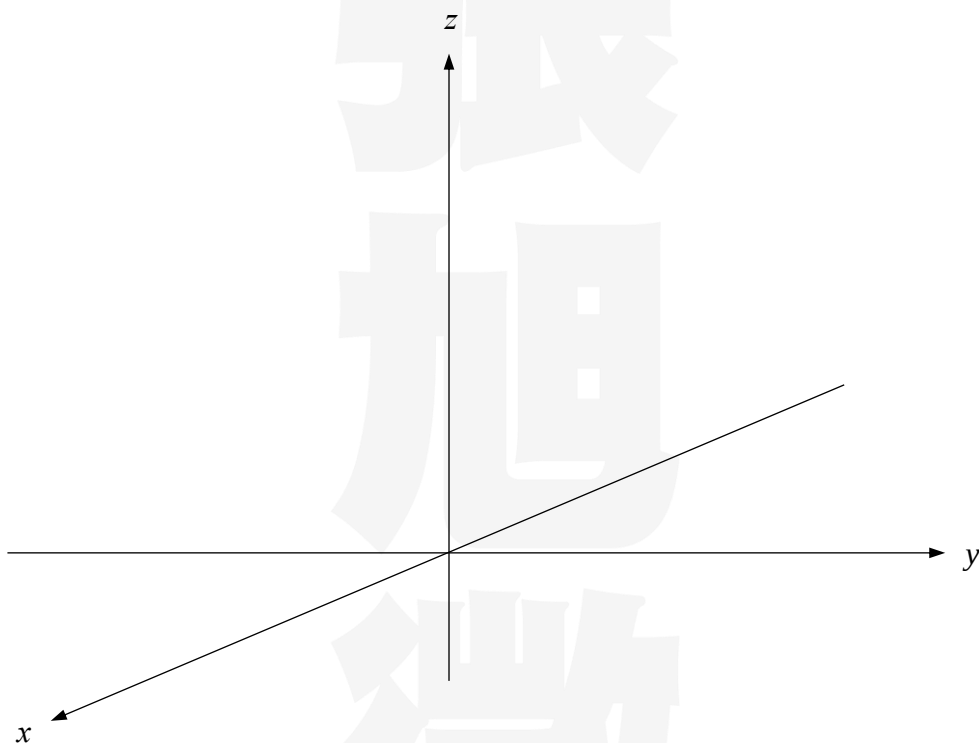
- (4) $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y), w(x, y))$ ：二變數三維向量函數

可用來表示 _____

例題 1.

Sketch $f(t) = (\sin t, \cos t, t)$, where $0 \leq t \leq 2\pi$

解



重點二 向量函數的極限、連續與微分

1. 向量函數的極限

(1) 設 $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t))$, $f_k(t) \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{L} = (L_1, L_2, \dots, L_m) \in \mathbb{R}^m$

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \mathbf{L} \Leftrightarrow \underline{\hspace{10cm}}$$

說例

$$f(t) = (\sin(t), \cos(t), e^t) \text{ , 求 } \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$$

$$\because \lim_{t \rightarrow 0} \sin(t) = 0 \text{ 、 } \lim_{t \rightarrow 0} \cos(t) = 1 \text{ 且 } \lim_{t \rightarrow 0} e^t = 1$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = (0, 1, 1)$$

(2) 設 $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \mathbf{L}$ 、 $\lim_{t \rightarrow a} g(t) = \mathbf{M}$ 、 $c \in \mathbb{R}$ 且 $\lim_{t \rightarrow a} \lambda(t) = \alpha \in \mathbb{R}$, 則 :

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow a} (cf)(x) = c\mathbf{L}$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \mathbf{L} + \mathbf{M}$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{t \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{t \rightarrow a} (f \times g)(t) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\textcircled{5} \quad \lim_{t \rightarrow a} (\lambda f)(t) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\textcircled{6} \quad \text{若 } \lim_{t \rightarrow a} \lambda(t) \neq 0 \text{ , 則 } \lim_{t \rightarrow a} \left(\frac{f}{\lambda}\right)(t) = \underline{\hspace{2cm}}$$

(3) 設 $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = L \in \mathbb{R}$ 、 $\lim_{t \rightarrow L} g(t) = g(L) \in \mathbb{R}^m$

$$\text{則 } \lim_{t \rightarrow a} g(f(t)) = g(L)$$

(4) 設 $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \mathbf{L} \in \mathbb{R}^m$ 、 $\lim_{x \rightarrow \mathbf{L}} g(x) = g(\mathbf{L}) \in \mathbb{R}^p$

$$\text{則 } \lim_{t \rightarrow a} g(f(t)) = g(\mathbf{L})$$

(1) $f(t) \in \mathbb{R}^m$ 在 $t = a$ 連續 $\Leftrightarrow \begin{cases} \textcircled{1} f(a) \text{ 存在} \\ \textcircled{2} \lim_{t \rightarrow a} f(t) \text{ 存在} \\ \textcircled{3} \end{cases}$

① 亦連續

(4) 若 $f(t) \in \mathbb{R}^m$ 在 $t=a$ 連續且 $g(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^p$ 在 $\mathbf{x} = f(a)$ 連續
則 $(g \circ f)(t) = g(f(t))$ 在 $t=a$ 亦連續

$f(t)$ 在 $t=a$ 可微 $\Leftrightarrow$

① $(cf)(t)$ 在 $t=a$ 可微且 $(cf)'(a)=$ _____

② $(f+g)(t)$ 在 $t=a$ 可微且 $(f+g)'(a)=$

③ $(f \cdot g)(t)$ 在 $t=a$ 可微且 $(f \cdot g)'(a) =$

④ $(f \times g)(t)$ 在 $t=a$ 可微且 $(f \times g)'(a) =$

⑤ $(\lambda f)(t)$ 在 $t=a$ 可微且 $(\lambda f)'(a)=$

⑥ 當 $\lambda(a) \neq 0$ 時， $(\frac{f}{\lambda})(t)$ 在 $t=a$ 可微且 $(\frac{f}{\lambda})'(a) = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) 設 $f(t) \in \mathbb{R}$ 在 $t=a$ 可微且 $g(t) \in \mathbb{R}^m$ 在 $t=f(a)$ 可微

則 $(g \circ f)(t)$ 在 $t=a$ 可微且 $(g \circ f)'(t) = \underline{\hspace{2cm}}$

(4) 設 $f(t) \in \mathbb{R}^m$ 在 $t=a$ 可微且 $g(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^p$ 在 $\mathbf{x}=f(a)$ 可微

則 $(g \circ f)(t)$ 在 $t=a$ 可微且 $(g \circ f)'(t) = \underline{\hspace{2cm}}$

4. 多變量向量函數的微分公式：

設 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ ，其中 $y_k = y_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$

則 $Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ 稱為 f 的微分 (differential)

說例

$$f(x, y) = (x \sin y, ye^x) \Rightarrow Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} x \sin y & \frac{\partial}{\partial y} x \sin y \\ \frac{\partial}{\partial x} ye^x & \frac{\partial}{\partial y} ye^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin y & x \cos y \\ ye^x & e^x \end{pmatrix}$$

例題 1. (精選範例 2-1)

Let $f(t) = (\sin t, \cos t)$, $g(t) = (t, e^t)$, $\lambda(t) = t^2 + 5$, find the following derivatives:

- (1) $(f+g)'(0)$ (2) $(f \cdot g)'(0)$ (3) $(f \times g)'(0)$ (4) $(\lambda f)'(0)$ (5) $(\frac{f}{\lambda})'(0)$

解

張
旭
微
積
分

例題 2. (精選範例 2-2)

Let $f(t) = \sin t$ and $g(t) = (e^t, \cos t)$, find $(g \circ f)'(0)$.

解

例題 3. (精選範例 2-3)

Let $f(t) = (\sin t, \log_2 t)$ and $g(x, y) = (y, x^2)$, find $(g \circ f)'(1)$.

解

重點三 向量函數的積分

1. 向量函數的積分

設 $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t))$, $f_k(t) \in \mathbb{R}$, 則 :

$$(1) \int f(t)dt = (\int f_1(t)dt, \int f_2(t)dt, \dots, \int f_m(t)dt)$$

$$(2) \int_a^b f(t)dt = \underline{\hspace{10cm}}$$

說例

$$\begin{aligned} f(t) &= (\sin t, \cos t) \\ \Rightarrow \int f(t)dt &= (\int \sin t dt, \int \cos t dt) = (-\cos t + C_1, \sin t + C_2) \end{aligned}$$

2. 向量函數積分的運算

設 $f(t), g(t) \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}$, 則 :

$$(1) \int cf(t)dt = c \int f(t)dt$$

$$(2) \int f(t) + g(t)dt = \int f(t)dt + \int g(t)dt$$

說例

$$\begin{aligned} f(t) &= (\sin t, \cos t), \quad g(t) = (t, e^t) \\ (1) \int 5f(t)dt &= \int (5\sin t, 5\cos t)dt = (\int 5\sin t dt, \int 5\cos t dt) = (-5\cos t + C_1, 5\sin t + C_2) \\ &= 5(-\cos t + C_1, \sin t + C_2) = 5(\int \sin t dt, \int \cos t dt) = 5 \int f(t)dt \\ (2) \int f(t) + g(t)dt &= \int (\sin t + t, \cos t + e^t)dt = (\int \sin t + t dt, \int \cos t + e^t dt) \\ &= (-\cos t + \frac{t^2}{2} + C_1, \sin t + e^t + C_2) \\ &= (-\cos t + C_{1,1}, \sin t + C_{2,1}) + (\frac{t^2}{2} + C_{1,2}, e^t + C_{2,2}) \\ &= (\int \sin t dt, \int \cos t dt) + (\int t dt, \int e^t dt) \\ &= \int (\sin t, \cos t)dt + \int (t, e^t)dt \\ &= \int f(t)dt + \int g(t)dt \end{aligned}$$

重點四 曲線分析

1. 曲線函數：

- (1) $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leq t \leq b$, 是一個起點為 $r(a)$, 終點為 $r(b)$ 的空間曲線
- (2) $r(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, 是一個起點為 $r(a)$, 終點為 $r(b)$ 的平面曲線
- (3) $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, , 是一個起點為 $f(a)$, 終點為 $f(b)$ 的平面曲線
 $\Rightarrow$ 此曲線可改寫成 $r(t) = (t, f(t))$, $a \leq t \leq b$

2. 切向量：

- (1) 空間曲線 $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 在 $t = t_0$ 的切向量為 _____
- (2) 平面曲線 $r(t) = (x(t), y(t))$ 在 $t = t_0$ 的切向量為 _____
- (3) 平面曲線 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 的切向量為 _____
- (4) 曲線 $r(t)$ 在 $t = t_0$ 的切向量為 _____ , 故單位切向量為 _____
 此時的單位切向量記為 $T(t_0)$

說例

設 $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$

$$\Rightarrow T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \frac{(-\sin t, \cos t, 1)}{\|(-\sin t, \cos t, 1)\|} = \frac{(-\sin t, \cos t, 1)}{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}} = \left(\frac{-\sin t}{\sqrt{2}}, \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

3. 弧長公式：

- (1) 空間曲線 $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leq t \leq b$, 的弧長 $\ell =$ _____
- (2) 平面曲線 $r(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, 的弧長 $\ell =$ _____
- (3) 平面曲線 $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, 的弧長 $\ell =$ _____

說例

設 $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\text{則其弧長 } \ell = \int_0^{2\pi} \|r'(\tau)\| d\tau = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin \tau)^2 + (\cos \tau)^2 + 1^2} d\tau = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} d\tau = 2\sqrt{2}\pi$$

4. 弧長函數與曲線弧長參數化 (parametrized by arc-length) :

設曲線 $r(t)$, $a \leq t \leq b$

(1) 曲線的弧長函數 $s(t) =$ _____

(2) 弧長函數微分 $s'(t) =$ _____

(3) 何謂曲線弧長參數化？即曲線的定義域區間恰為 $[0, \ell]$, 且 $f(0)$ 到 $f(s)$ 的曲線弧長恰為 s , 後者即 $\int_0^s \|r'(u)\| du = s$, 將兩邊對 s 微分得 $\|r'(s)\| = 1$

(4) 設 $r(s)$ 為一弧長參數化之曲線 , 則 $T(s) = \frac{r'(s)}{\|r'(s)\|} = \frac{r'(s)}{1} = r'(s)$

5. 法向量 :

設 $r(t)$ 是一個曲線 , 則在 $t = t_0$ 定義 :

(1) (單位) 主法向量 (normal) $N(t_0) =$ _____

(2) (單位) 副法向量 (binormal) $B(t_0) =$ _____

(3) $T(t)$ 、 $N(t)$ 、 $B(t)$ 在任意 $t = t_0$ 上必互相垂直

說例

設 $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$, 則 :

$$(1) \quad T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \cdots = \left(\frac{-\sin t}{\sqrt{2}}, \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$(2) \quad N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t, \cos t, 1)'}{\left\| \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t, \cos t, 1)' \right\|} = \frac{(-\cos t, -\sin t, 0)}{\sqrt{(-\cos t)^2 + (-\sin t)^2}} = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

$$(3) \quad B(t) = T(t) \times N(t) = \begin{vmatrix} \frac{\cos t}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sin t & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\sin t \\ 0 & -\cos t \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{vmatrix} = \left(\frac{\sin t}{\sqrt{2}}, \frac{-\cos t}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

6. 密切面 (osculating plane)、法平面 (normal plane)、從切面 (rectifying plane)

設 $r(t)$ 是一個曲線，則在 $t=t_0$ 定義：

(1) 密切面為一個由 _____ 和 _____ 決定且過 $r(t_0)$ 的平面

(2) 法平面為一個由 _____ 和 _____ 決定且過 $r(t_0)$ 的平面

(3) 從切面為一個由 _____ 和 _____ 決定且過 $r(t_0)$ 的平面

說例

設 $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ，當 $t = \frac{\pi}{4}$ 時

$$\text{因 } r\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right) \text{ 且 } \begin{cases} T\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}, \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) // (-2, 2, \sqrt{2}) \\ N\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\cos \frac{\pi}{4}, -\sin \frac{\pi}{4}, 0\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) // (1, 1, 0) \\ B\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}, -\frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) // (2, -2, \sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\text{故由 } T\left(\frac{\pi}{4}\right) \times N\left(\frac{\pi}{4}\right) // (-2, 2, \sqrt{2}) \times (1, 1, 0) = \begin{vmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -4)$$

可知密切面為 $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 4z = \pi$

$$\text{由 } N\left(\frac{\pi}{4}\right) \times B\left(\frac{\pi}{4}\right) // (1, 1, 0) \times (2, -2, \sqrt{2}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & \sqrt{2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -4)$$

可知法平面為 $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y - 4z = -\pi$

$$\text{由 } B\left(\frac{\pi}{4}\right) \times T\left(\frac{\pi}{4}\right) // (2, -2, \sqrt{2}) \times (-2, 2, \sqrt{2}) = \begin{vmatrix} -2 & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = (-4\sqrt{2}, -4\sqrt{2}, 0)$$

可知從切面為 $x + y = \sqrt{2}$

7. 曲率：

(1) 若 $r(s)$ 為一弧長參數化之曲線，則 $r(s)$ 在 $s = s_0$ 的曲率 $\kappa =$ _____

(2) 若 $r(t)$ 沒有規定弧長參數化，則 $r(t)$ 在 $t = t_0$ 的曲率 $\kappa =$ _____

說明

$$\kappa = \left\| \frac{dT}{ds} \right\| = \left\| \frac{dT/dt}{ds/dt} \right\| = \frac{\|T'(t)\|}{s'(t)} = \frac{\|T'(t)\|}{\|r'(t)\|}$$

(3) 若 $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ，則 $r(t)$ 在 $t = t_0$ 的曲率 $\kappa =$ _____

說明

$$\begin{aligned} \because T(t) &= \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \frac{r'(t)}{s'(t)} \\ \therefore r'(t) &= s'(t)T(t) \\ \Rightarrow r''(t) &= s''(t)T(t) + s'(t)T'(t) \\ \Rightarrow r'(t) \times r''(t) &= r'(t) \times [s''(t)T(t) + s'(t)T'(t)] = s''(t)r'(t) \times T(t) + s'(t)r'(t) \times T'(t) \\ \because r'(t) // T(t) \\ \therefore r'(t) \times T(t) &= 0 \\ \because r'(t) // T(t) \text{ 且 } \because T'(t) // B(t) \perp T(t) \\ \therefore \|r'(t) \times T'(t)\| &= \|r'(t)\| \cdot \|T'(t)\| = s'(t) \cdot \kappa s'(t) = \kappa [s'(t)]^2 \\ \Rightarrow \|r'(t) \times r''(t)\| &= s'(t) \cdot \kappa [s'(t)]^2 = \kappa [s'(t)]^3 \\ \Rightarrow \kappa &= \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{[s'(t)]^3} = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3} \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

(4) 若 $r(t) = (x(t), y(t))$ ，則 $r(t)$ 在 $t = t_0$ 的曲率 $\kappa =$ _____

說明

將 $r(t) = (x(t), y(t))$ 視為三維空間中限定在 xy 平面的曲線

則可將 $r(t) = (x(t), y(t))$ 寫成 $r(t) = (x(t), y(t), 0)$

此時 $r'(t) = (x'(t), y'(t), 0)$ 且 $r''(t) = (x''(t), y''(t), 0)$

$$\Rightarrow \|r'(t) \times r''(t)\| = \sqrt{\begin{vmatrix} y'(t) & 0 \\ y''(t) & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & x'(t) \\ 0 & x''(t) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}^2} = |x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|$$

$$\text{故 } \kappa = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3} = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{Q.E.D.}$$

(5) 若 $y = f(x)$ ，則在 $x = x_0$ 的曲率 $\kappa =$ _____

說明

令 $r(t) = (t, f(t))$

$$\text{則 } \kappa = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|1 \cdot f''(t) - 0 \cdot f'(t)|}{(1^2 + [f'(t)]^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|f''(t)|}{(1 + [f'(t)]^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{Q.E.D.}$$

8. 密切圓 (osculating circle) / 曲率圓 (circle of curvature)

設 $r(t)$ 為一曲線，若在 $t = t_0$ 處曲率不為 0，則可定義 $r(t)$ 在 $t = t_0$ 的密切圓

在 $t = t_0$ 的密切圓 C 必須滿足以下三個條件：

- (1) C 和 $r(t)$ 相切於 $t = t_0$
- (2) C 和 $r(t)$ 在 $t = t_0$ 有相同的曲率
- (3) C 在 $r(t)$ 凹側

此時 C 的半徑稱為 $r(t)$ 在 $t = t_0$ 的曲率半徑 $\rho = \frac{1}{\kappa}$

例題 1. (精選範例 4-1)

Find the osculating circle of $y = x^2$ at $(x, y) = (0, 0)$ and $(x, y) = (1, 4)$.

解

例題 2. (精選範例 4-2)

Find the osculating circle of $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$ at $t = \frac{\pi}{2}$.

解

例題 3. (精選範例 4-3)

Find the osculating plane, normal plane and the rectifying plane of $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$ at $t = \frac{\pi}{2}$.

解

例題 4. (精選範例 4-4)

Find the arc-length of $r(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$.

解

例題 5. (精選範例 4-5)

Find the arc-length function of $r(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \geq 0$.

解

重點五 旋轉體分析

1. $y = f(x)$ 以 x 為軸旋轉, $a \leq x \leq b$

(1) 所掃出旋轉體體積 $V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$

(2) 所掃出旋轉體表面積 $S = \int_a^b 2\pi f(x) ds = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

2. $x = g(y)$ 以 y 為軸旋轉, $c \leq y \leq d$

(1) 所掃出旋轉體體積 $V = \int_c^d \pi [g(y)]^2 dy$

(2) 所掃出旋轉體表面積 $S = \int_c^d 2\pi g(y) ds = \int_c^d 2\pi g(y) \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy$

例題 1.

Find the surface area generated by revolving $y = \sqrt{4 - x^2}, -1 \leq x \leq 1$ about the x -axis.

解

例題 2. (精選範例 5-1)

Find the surface area generated by revolving $y = x^2$ with endpoints $(1,1)$ and $(2,4)$ about the y -axis.

解

例題 3. (精選範例 5-2)

Suppose $a > b$. Find the volume and the surface area generated by revolving $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ about the x -axis.

解

重點六 向量場與保守場

1. 向量場 (vector field) 的定義

- (1) 形如 $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ 或 $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ 這類型定義域和對應域的維度相同的函數，就稱為向量場
- (2) 若一向量場的各分量函數為連續函數，則稱此向量場為連續向量場；若各分量函數為可微向量場，則稱其為可微向量場

說例

$F(x, y, z) = (2x, y)$ 不是向量場

$F(x, y) = (2x, y)$ 是向量場，且為可微向量場

2. 保守 (conservative) 場的定義

設 F 是一個向量場，若存在一個純量函數 f 使得
則稱 F 是一個保守場

此時稱 f 為 F 的位勢函數 (potential function)

說例

(1) $F(x, y) = (y, x)$ 是保守場，因 $F = \nabla(xy)$

(2) 若 $F(x, y) = (x + y, y)$ 是保守場，則存在純量函數 $f(x, y)$ 使得 $\nabla f = F$

$$\Rightarrow (f_x, f_y) = (x + y, y)$$

$$\because f_x = x + y$$

$$\therefore f = \frac{x^2}{2} + xy + \phi(y)$$

$$\because f_y = y$$

$$\therefore x + \phi'(y) = y \text{ (矛盾, 因 } \phi'(y) \text{ 不可能產生 } x \text{ 項)}$$

因此 $F(x, y) = (x + y, y)$ 不為保守場

例題 1.

Let $F(x, y, z) = (y^2 \cos x + z^3, 2y \sin x - 4, 3xz^2 + 2)$. Is F a conservative vector field? If it is, find its potential function.

解

張
旭
微
積
分

重點七 線積分

1. 純量函數的線積分

令 f 是一個定義在 D 上的實數值函數，設 C 是一個包含於 D 的曲線

令 C 的參數化為 $r(t)$ ， $a \leq t \leq b$

則可以定義 f 在 C 上的積分： $\int_C f ds =$ _____

說例

Let $f(x, y) = x + y$, $C: r(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_C f ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r(t)) \|r'(t)\| dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + \sin t) \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt \\ &= \sin t - \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = (1) - (-1) = 2 \end{aligned}$$

2. 向量函數的線積分 (功 work)

令 F 是一個定義在 D 上的向量函數，設 C 是一個包含於 D 的曲線

令 C 的參數化為 $r(t)$ ， $a \leq t \leq b$

則可定義 F 在 C 上的作功： $\int_C F \cdot dr =$ _____

說例

Let $F(x, y) = (x, y)$, $C: r(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \int_C F dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = 0$$

3. 向量函數的線積分 (通量 flux)

令 F 是一個定義在 D 上的向量函數，設 C 是一個包含於 D 的曲線

令 C 的參數化為 $r(t)$ ， $a \leq t \leq b$ ， N 為 C 上的單位法向量

則可定義 F 在 C 上的通量： $\int_C F \cdot N ds =$ _____

說例

Let $F(x, y) = (x, y)$, $C: r(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_C F \cdot N ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(r(t)) \cdot \frac{r''(t)}{\|r''(t)\|} \|r'(t)\| dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t, \sin t) \cdot \frac{(-\cos t, -\sin t)}{1} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -1 dt = -\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

4. 特殊形式 $\int_C Pdx + Qdy$

令 $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ 是一個定義在 D 上的向量函數

設 C 是一個包含於 D 的曲線

令 C 的參數化為 $r(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, 則 :

$$(1) \int_C Pdx + Qdy = \int_C (P, Q) \cdot (dx, dy) = \int_C F \cdot dr$$

$$(2) \int_C Pdx + Qdy = \int_a^b P(r(t))x'(t)dt + Q(r(t))y'(t)dt = \int_a^b P(r(t))x'(t)dt + \int_a^b Q(r(t))y'(t)dt$$

說例

Let $P(x, y) = x$, $Q(x, y) = y$, $C: r(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_C Pdx + Qdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} P(r(t))x'(t)dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} Q(r(t))y'(t)dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t(-\sin t)dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt \\ &= 0\end{aligned}$$

5. 積分路徑具有方向性

(1) $-C$ 表示與 C 所形成的集合相同，但起點與終點相反的路徑

$$(2) \int_{-C} = -\int_C$$

例題 1. (精選範例 7-1)

Integrate $f(x, y, z) = x + y^2 - 2z$ over the line segment C joining the origin and the point $(1, 1, 1)$.

解

例題 2. (精選範例 7-2)

Evaluate the line integral $\int_C (2x + 9z)ds$, where the curve C is given by $x = t, y = t^2, z = t^3, 0 \leq t \leq 1$.

解

例題 3. (精選範例 7-3)

Find the work done by $F = (y - x^2)i + (z - y^2)j + (x - z^2)k$ over the curve $r(t) = ti + t^2j + t^3k, 0 \leq t \leq 1$.

解

例題 4. (精選範例 7-4)

A fluid's velocity is $F = xi + yj + zk$. Find the flow along the helix

$r(t) = (\cos t)i + (\sin t)j + tk, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

解

例題 5. (精選範例 7-5)

Find the circulation $F = (x - y)i + xj$ around the circle $r(t) = (\cos t)i + (\sin t)j, 0 \leq t \leq 2\pi$.

解

例題 6. (精選範例 7-6)

Evaluate $\int_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$, where C is the part of $x^2 + y^2 = 4$ from $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ to $(-2, 0)$.

解

重點八 微積分基本定理 for 線積分

1. 微積分基本定理 for 線積分

令 $C: r(t), a \leq t \leq b$ 為一曲線， f 可微且 ∇f 在 C 上連續

則 $\int_C \nabla f \cdot dr =$ _____

2. 保守場線積分

(1) 保守場線積分在簡單封閉曲線上積分值為 0

說明

Let $C: r(t), a \leq t \leq b$, be a simple closed curve, that is, $r(a) = r(b)$

Suppose F is a conservative vector field, that is, $\exists f$ such that $\nabla f = F$

then $\int_C F \cdot dr = \int_C \nabla f \cdot dr = f(r(b)) - f(r(a)) = 0$

(2) 保守場線積分結果與路徑無關

說明

Let $C_1: r_1(t), a \leq t \leq b$, and $C_2: r_2(t), c \leq t \leq b$, be two simple curve with the same orientation and endpoints

then $C_1 + (-C_2)$ is a simple closed curve

$$\Rightarrow 0 = \int_{C_1 + (-C_2)} F dr = \int_{C_1} F dr + \int_{-C_2} F dr = \int_{C_1} F dr - \int_{C_2} F dr$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} F dr = \int_{C_2} F dr$$

3. 保守場檢驗法

(1) 設 F 為一向量場，若存在純量場 f 使得 $\nabla f = F$ ，則稱 F 為保守場 (定義)

(2) 設 $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ ，若 _____，則 F 為保守場 (定理)

(3) 設 $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ ，若 _____

則 F 為保守場 (定理)

說例

(1) 設 $F(x, y) = (x + y, y)$ ，因 $(x + y)_y = 1 \neq 0 = (y)_x$ ，故 F 不為保守場

(2) 設 $F(x, y, z) = (x, y, z)$ ，因 $\begin{cases} (x)_y = 0 = (y)_x \\ (y)_z = 0 = (z)_y \\ (z)_x = 0 = (x)_z \end{cases}$ ，故 F 為保守場

例題 1. (精選範例 8-1)

Find the line integral of $F(x, y, z) = (2xyz, x^2z, x^2y)$ over any path from $(0, 0, 0)$ to $(1, 2, 3)$.

解

例題 2. (精選範例 8-2)

Evaluate $\int_{(0,0,0)}^{(3,3,1)} 2x dy - y^2 dy - \frac{4}{1+z^2} dz$.

解

例題 3. (精選範例 8-3)

Let $F(x, y) = (\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2})$, $C: r(t) = (\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$.

(1) Is F conservative?

(2) Evaluate $\int_C F \cdot dr$.

解

重點九 格林定理

◎ 格林定理 (Green Theorem)

設 C 為一個平面正向簡單封閉曲線且其內部區域為 D

設 P 和 Q 為定義在 D 上偏導函數連續的實數值函數

則： $\int_C Pdx + Qdy =$ _____

例題 1.

Evaluate $\int_C xydy - y^2dx$, where C is the boundary determined by $x=1, y=1, x=0, y=0$ with positive orientation.

解

例題 2. (精選範例 9-1)

Let $C: 4x^2 + y^2 = 4$, evaluate $\int_C (2x - x^3y^5)dx + x^3y^8dy$.

解

例題 3. (精選範例 9-2)

Find the area of ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

解

例題 4. (精選範例 9-3)

Let $F = x^2yi - xy^2j$, find the work of a particle moving along the circle $x^2 + y^2 = 4$ counterclockwise.

解

例題 5. (精選範例 9-4)

Let C be the circle $x^2 + y^2 = 1$ and $\hat{n}$ be the outer normal vector. Let $F = (x + y, x - y)$, evaluate $\int_C F \cdot \hat{n} ds$.

解

重點十 梯度、旋度、散度

1. 梯度 (gradient)

針對任意純量場 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$

定義 f 的梯度 $\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \nabla f$

說例

$$f(x, y, z) = 3x + yz \Rightarrow \text{grad } f = \nabla f = (3, z, y)$$

2. 散度 (divergent)

針對任意向量場 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

定義 F 的散度 $\text{div } F = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial y_n}{\partial x_n} = \nabla \cdot F$

說例

$$F(x, y, z) = (x^2, yz, xz^2) \Rightarrow \text{div } F = \nabla \cdot F = 2x + z + 2xz$$

3. 旋度 (curl)

針對任意向量場 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

定義 F 的旋度 $\text{curl } F = \nabla \times F$

說例

$$F(x, y, z) = (x^2, yz, xz^2) \Rightarrow \text{curl } F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & yz & xz^2 \end{vmatrix} = (-y, -z^2, 0)$$

4. 無旋向量場、無散向量場

(1) 若 $\nabla \cdot F = 0$ ，則稱 F 為無散場

(2) 若 $\nabla \times F = 0$ ，則稱 F 為無旋場

(3) 對任意向量場 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

① $\nabla \cdot \nabla \times F = 0$ ，此表示 $\nabla \times F$ 必為無散場

② $\nabla \times \nabla f = 0$ ，此表示 ∇f 必為無旋場

③ 若 F 的分量有連續的偏導數，則： F 為保守場 $\Leftrightarrow \nabla \times F = 0$

5. 拉普拉斯算子

針對任意純量場 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$

定義 f 的 Laplacian $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = \nabla \cdot \nabla f$

說例

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \Delta f = \nabla \cdot \nabla f = 2 + 2 + 2 = 6$$

例題 1. (精選範例 10-1)

Find the divergence and the curl of the following vector field.

(1) $F = (xy, (y^2 - z^2), yz)$

(2) $F = (xe^y, -ye^x)$

解

例題 2. (精選範例 10-2)

Show that $\nabla \times \nabla \times F = \nabla(\nabla \cdot F) - \Delta F$.

解

例題 3. (精選範例 10-3)

Show that $F(x, y, z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$ is conservative and find the potential function of F .

解

重點十一 曲面

1. 將曲面參數化需要用到兩個參數：

說例

(1) $S: z = x^2 + 2y^2 \Rightarrow r(u, v) = (u, v, u^2 + 2v^2)$ 是 S 的一個參數方程式

(2) $S: z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq 1$

① $r(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2}), 0 \leq u^2 + v^2 \leq 1$ 是 S 的一個參數方程式

② $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u), 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi$ 也是 S 的一個參數方程式

2. 曲面參數方程式可去參數：

說例

$S: r(u, v) = (2 \cos u, 2 \sin u, v) \Rightarrow S: x^2 + y^2 = 4$ 表曲面為一個圓柱

例題 1. (精選範例 11-1)

Sketch the graph of the parametrized surface

$r(u, v) = ((3 + 2 \cos v) \cos u, (3 + 2 \cos v) \sin u, 2 \sin v), 0 \leq u, v \leq 2\pi.$

解

重點十二 曲面分析與面積分

1. 法向量與切平面

設 $S: r(u, v)$ 為一曲面，則 S 在 $(u_0, v_0, r(u_0, v_0))$ 的：

(1) 法向量為 $r_u \times r_v|_{(u_0, v_0)}$

(2) 切平面方程式為 $r_u \times r_v|_{(u_0, v_0)}(x - u_0, y - v_0, z - r(u_0, v_0)) = 0$

說例

設 $S: r(u, v) = (u, v, \sin u + \cos v)$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_u = (1, 0, \cos u) \\ r_v = (0, 1, -\sin v) \end{cases}$$

$\Rightarrow S$ 在 $(0, 0, 1)$ 的法向量為 $(1, 0, 1) \times (0, 1, 0) = (-1, 0, 0)$

$\Rightarrow S$ 在 $(0, 0, 1)$ 的切平面為 $(-1, 0, 0)(x - 0, y - 0, z - 1) = 0$ 即 $x = 0$

2. 表面積

(1) 設 $S: r(u, v) \in \mathbb{R}^3$ ， $(u, v) \in D$ ，為一曲面

則 S 曲面面積 $A(S) =$ _____

說例

Let $S: r(u, v) = (u \sin v, u \cos v, v)$, $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \pi$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_u = (\sin v, \cos v, 0) \\ r_v = (u \cos v, -u \sin v, 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow r_u \times r_v = \begin{vmatrix} \cos v & 0 \\ -u \sin v & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & \sin v \\ 1 & u \cos v \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sin v & \cos v \\ u \cos v & -u \sin v \end{vmatrix} \\ = (\cos v, -\sin v, -u)$$

$$\Rightarrow |r_u \times r_v| = \sqrt{(\cos v)^2 + (-\sin v)^2 + (-u)^2} = \sqrt{1 + u^2}$$

$$\Rightarrow A(S) = \iint_D |r_u \times r_v| dA = \int_0^\pi \int_0^1 \sqrt{1 + u^2} du dv = \frac{\pi}{2} (\sqrt{2} + \sinh^{-1}(1))$$

(2) 設 $S: z = f(x, y)$ ， $(x, y) \in D$ ，為一曲面

則 S 曲面面積 $A(S) =$ _____

說例

$$\text{Let } S: z = \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}), 0 \leq x, y \leq 1$$

$$\Rightarrow A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1+x+y} dx dy = \frac{4}{15}(1-8\sqrt{2}+9\sqrt{3})$$

3. 純量函數的面積分

令 f 是一個定義在曲面 S 上的實數值函數

(1) 設 $S: r(u, v) \in \mathbb{R}^3, (u, v) \in D$

若 $|r_u \times r_v|$ 在 D 上恆不為 0

則可以定義 f 在 S 上的積分： $\iint_S f dS =$ _____

說例

$$\text{Let } S: r(u, v) = (u \sin v, u \cos v, v), D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \pi\}$$

$$\text{Let } f(x, y, z) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \iint_S f dS &= \iint_D f(r(u, v)) |r_u \times r_v| du dv = \int_0^\pi \int_0^1 2\sqrt{(u \sin v)^2 + (u \cos v)^2} \sqrt{1+u^2} du dv \\ &= \int_0^\pi \int_0^1 2u\sqrt{1+u^2} du dv = \frac{2\pi}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1) \end{aligned}$$

(2) 設 $S: z = g(x, y), (x, y) \in D$

則可定義 f 在 S 上的積分： $\iint_S f dS =$ _____

說例

$$\text{Let } S: g(x, y) = x + y, 0 \leq x, y \leq 1$$

$$\text{Let } f(x, y, z) = x + y + z$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \iint_S f dS &= \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (x + y + (x + y)) \sqrt{1+1+1} dx dy = 2\sqrt{3} \int_0^1 \int_0^1 x + y dx dy \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

4. 向量函數的面積分 (通量 flux)

令 F 是一個定義在曲面 S 上的向量函數

(1) 設 $S: r(u, v) \in \mathbb{R}^3, (u, v) \in D$, $\hat{n}$ 為曲面上的法向量

則可以定義 F 在 S 上的積分： $\iint_S F \cdot \hat{n} dS =$ _____

(2) 設 $S: z = g(x, y), (x, y) \in D$, $\hat{n}$ 為曲面上的法向量

則可以定義 F 在 S 上的積分： $\iint_S F \cdot \hat{n} dS =$ _____

例題 1.

Find the flux of $F = yzj + z^2k$ outward through the surface S cut from the cylinder $y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, by the plane $x = 0$ and $x = 1$.

解

例題 2. (精選範例 12-1)

If $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0\}$, evaluate the surface integral $\iint_S z dS$.

解

例題 3. (精選範例 12-2)

Find the surface area of the portions of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ that are within the cylinder $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

解

張
旭
微
積
分

重點十三 散度定理

◎ 散度定理 (Divergence Theorem)

設 V 為簡單立體區域， ∂V 是 V 的邊界曲面， $\hat{n}$ 為曲面上的法向量

設 F 為定義在 V 內部的向量函數，且其分量函數有連續的偏導函數

則： $\iint_{\partial V} F \cdot \hat{n} dS =$ _____

例題 1.

Let S be the sphere centered at the origin of radius a , $F(x, y, z) = (z, y, x)$. Verify the divergence theorem.

解

例題 2. (精選範例 13-1)

Consider the vector field $F(x, y, z) = (x^3 + 3y + \tan z, y^3, x^2 + y^2 + 3z^2)$

(1) Find $\operatorname{div} F$.

(2) Find the flux of the vector field F across S , which the part of the surface $1 - z = x^2 + y^2$ with $0 \leq z \leq 1$ and is oriented upward.

解

重點十四 史托克定理

◎ 史托克定理 (Stoke Theorem)

設 S 為一曲面， ∂S 是 S 的邊界曲線 (此曲線須為簡單封閉)

設 T 為曲線上的切向量

設 F 為定義在 S 內部的向量函數，且其分量函數有連續的偏導函數

則： $\int_{\partial S} F \cdot T ds$ _____

例題 1.

Evaluate $\int_C F \cdot dr$, where $F = xzi + xyj + 3xzk$ and C is the boundary of the portion of the plane $2x + y + z = 2$ in the first octant, traversed counterclockwise as viewed from above.

解

例題 2. (精選範例 14-1)

Evaluate $\iint_{\Gamma} \text{curl } U \cdot dS$, where $U(x, y, z) = (ye^z, x + y^2e^z, ze^{xy})$ and Γ is the part of the surface $z = 1 - x^2 - 2y^2$ with $z \geq 0$ and upward orientation.

解